Белов Сергей Александрович

«История Развития Математики»

ВМК, 9 семестр

Рефераты: 1) Математика XX-XXI веков;
2) Исторический обзор собственного диплома.

02.04.05 [Лекция 1]

ПРЕДМЕТ МАТЕМАТИКИ

Опр: *Математика* – (от греческого «μ α θ η μ α τ ε α», где «μ α θ η μ α» - наука) наука о изучении количественных отношений и пространственных форм окружающего мира.

Энгельс: чистая математика имеет своим объектом пространственные формы и количественные отношения действительного мира, стало быть, вполне реальный мир. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму может лишь слабо затушевать его происхождение из реального мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде необходимо совершенно отделить их от *содержания* и оставить его в стороне, как нечто безразличное.

Т.е. абстрактность математики не означает ее отрыва от реальной действительности. Чем больше ее изучают, тем больше абстракций, тем больше появляется теорий с эффектом нереальности.

Примеры: 1. Теорема Ала-Оглу: в сепарабельном рефлексивном Банoховом пространстве замкнутый шар слабо компактен (компактен относительно слабой сходимости). С помощью этой теоремы можно доказывать существование решений в уравнениях математической физики, а это реальный мир.

2. Теорема Ферма: при простых a и p (a не делится нацело на p) $a^{p-1} \equiv 1(\text{mod } p)$. На этом стоят все РСА-системы.

ЗАРОЖДЕНИЕ ПОНЯТИЯ ЧИСЛА

Каменный век (десятки тысяч лет назад): пещеры, собирательство. Наскальные рисунки позднего каменного века дают понять, что люди обладали хорошим чувством *формы*.

Неолит (переход пассивного отношения к природе к активному):

- Земледелие, скотоводство, постройка жилища на длительный срок. Возникают деревни. Хлеб, пиво, медь, бронза. Гончарный круг, колесо. Их изображения.
- Торговля, конкурентная борьба стимулирует развитие техники и совершенствование языков, в которых появляются числовые понятия, понятия форм.

Любое понятие о числе и форме это результат длительного умственного процесса многих поколений (например, понятия «дуб» и «береза» появились раньше, чем понятие «дерево»).

Пример: **Японский счет** – разные предметы считают по разному, в зависимости от их формы).

Считается, что первым шагом к возникновению понятия числа было *взаимно-однозначное соответствие* при обмене (шишек должно быть *столько же*, сколько и ракушек). Так возникают ЭТАЛОНЫ и порционный счет:

- Рука (столько же, сколько пальцев на руке) – 5;
- Глаза (столько же, сколько глаз) – 2;
- Две руки (столько же, сколько пальцев на двух руках вместе) – 10 и т.д.

Числительные возникли тогда, когда все народы говорили на одном языке (один корень):

Русский	Немецкий	Английский	Французский	Латинский
один	eins	one	un	unus
два	zwie	two	deux	duo
три	drei	three	trios	tres

<u>*Примеры*</u>: 1. **Россия**: этимология числительного «семь» – «много» (пословицы, поговорки). Десятичная система счисления – основана на пальцах рук.
2. **Новая Зеландия**: одиннадцатеричная система счисления (13=11+2).
3. **Грузия**: двадцатеричная система счисления, основанная на пальцах рук и ног (10 – ати;
20 – оци;
30 – оцдаати;
40 – ормоц;
50 – ормоцдаати и т.д.)
4. **Англия**: fourscore – 80 (80 = 4 * 20(пальцы)).
5. **Шумеры**: пятеричная система счисления (пальцы одной руки).
6. **Торесов пролив**: двоичная система счисления (1 – окоза, 2 – урапун, 5 - окозаурапунурапун).

Возникновение числовых обозначений: в Чехословакии в XIX веке была найдена кость волка с зарубками, датируемая 30 веком до н.э. На этой кости были сделаны 55 зарубок группами по 5, причем через каждые 25 – зарубка поглубже.

Виды (принципы) записи чисел

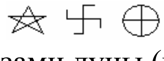
1. *Аддитивный принцип* (существует набор основных знаков, отвечающих некоторым числам, через которые записываются все остальные: (Рим) I – 1, V – 5, X – 10, L – 50 и т.д. 32 - XXXII);
2. *Субстрактивный принцип* ((вычитание) если существует запись вида nm (n<m), то ею записано число nm = m – n : (Рим) IV – 4, XL – 40 и т.д.);
3. *Мультипликативный принцип* (если существует запись вида nm (n<m), то ею записано число nm = m*n : (Китай)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000
一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	万

,

三十二 - 32; 四百三十二 - 432; 五千百三十二 - 5132; 九千万 - 9000000).

Возникновение понятия геометрических фигур и их измерение

- Неолит: возникает необходимость измерения длин, объемов, для чего использовались все подходящие эталоны (локоть и т.д.);
- При начале строительства появились понятия прямых углов и параллельных линий;
- Возникают первые магические знаки ();
- Стадии роста растений связывали с фазами луны (начала астрономии).

Первые древнейшие цивилизации возникают не случайно. О них сохранились документы, в том числе и математические.

1. Египет (река Нил – низовья, дельта);
2. Вавилон (реки Тигр, Евфрат);
3. Индия (реки Инд, Ганг);
4. Китай (реки Янцзы, Хуанхэ).

09.09.05 [Лекция 2]

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ЕГИПТА

Математические задачи всех цивилизаций очень похожи: как проводить каналы, как делить добычу, как строить мосты и и.д.

В Египте документы писались на папирусе (специально обработанный тростник) и сохранились только в пирамидах за счет вакуума (до 2000 лет), поэтому их очень немного.

1. Папирус Райнда
    - самый большой и ценный источник (длина – 5,25 м, ширина 33 см);
    - содержит 84 задачи;
    - был куплен Райндом в 1858 году в Луксоре и передан в Британский музей;
    - написан около 1800 г. до н.э. Причем его автор – Ахмес – только переписал его с папируса 200-летней давности.
2. Московский папирус
    - длина – 5,25 м, ширина 84 см;
    - содержит 25 задач;
    - был куплен Голенищевым и передан в московский музей им. Пушкина.

Дешифровка папирусов

- Папирусы написаны с помощью *пиктографического* письма – иероглифов различной сложности, возникших в 30-27 века до н.э.
- С течением времени иероглифы (пикто) сменяются упрощенным *иератическим* письмом.
- Еще позже его заменяет еще более простое *демотическое* (народное) письмо.
- ➔ Люди, понимающие иероглифы умерли, и до 19 века считалось, что тайна египетской письменности навсегда утеряна.

Ж.Ф.Шампольон (1790 – 1832) – французский египтолог, разгадавший тайну египетской письменности и в 1807 году опубликовавший свой труд о древних языках.

В 1799 г. в Египте воевал Наполеон. Его саперы обнаружили большую базальтовую плиту с тремя надписями в несколько строк: нижняя часть – восхваления («Слава царю Птолемею – доброму богу» и др.) на древнегреческом языке (сумели перевести); средняя часть – надпись демотическим письмом верхняя часть – надпись пиктографическим письмом. Ученые предположили, что написано одно и то же, но на разных языках. Копии этих трех надписей попали во Францию. Шампольон начал их изучать, в результате чего:

- Сосчитал, что всего 166 различных иероглифов → это не буквы алфавита, слишком много.
- Иероглифы слишком часто повторялись → это и не слова
- ➔ Слова и слоги.

  Пример: (Китай) 木 - дерево; 人 - человек; 木人 - отдых

  宀 - крыша; 女 - женщина; 安 - дешевый, безопасный

- Увидел, что во всех трех текстах существуют иероглифы, обведенные в рамочку, а так писали царские имена (на камне были Клеопатра (Kleopatrah) и Птолемей (Ptolmis)). → В данном случае иероглифы означали буквы, некоторые из которых повторялись (совпадали), причем ученый знал, как они произносятся.

  Пример: К («кели», Δ) – колено;

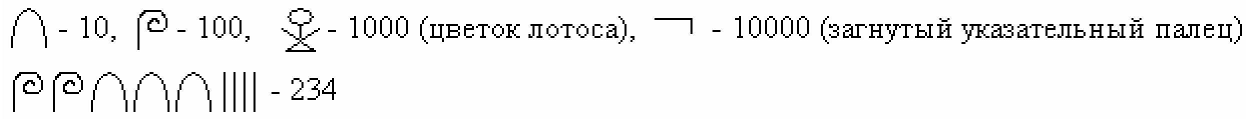
  Л («лабу») – лежащий лев; и т.д.

- В конце концов ученый начал читать египетские тексты, но ему не верили вплоть до 1866 года.

* Понять язык – это одно, но понять ТУ математику – совсем другая и не менее сложная задача.

Египетская нумерация

| – единица (вертикальная черта – зарубка), || – двойка, … , ||…| – девятка,

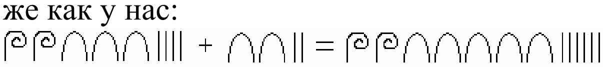


Запись не всегда слева направо: иногда сверху вниз или справа налево, но всегда направление чтения совпадает с направлением письма.

Цифры трансформировались со временем (писали красками и упрощали, например, заменяя ).

Действия над числами

Такие же как у нас:

Сложение: 

Умножение: (**метод удвоения**) 213*37

/ 1 213
2 426
/ 4 852
8 1704
16 3408
/ 32 6816

37 = 32 + 4 + 1 → 213*37 = 6816+852+213 = 7881 (двоичная запись числа)

Деление нацело: 7881 : 213

1 / 213
2 426
4 / 852
8 1704
16 3408
32 / 6816

7881 = 6816+852+213 → 7881 : 213 = 32 + 4 + 1 = 37

Деление с остатком: 5544 : 185

/ 1 185
2 370
/ 4 740
/ 8 1480
/ 16 2960

$5544 \geq 2960+1480+740+185 = 5365$ → остаток 5544 – 5365 = 179,
целая часть частного 16+8+4+1 = 29, 5544 : 185 = 29 + 179/185

* В Египте дроби **аликвотные** (числитель равен 1), т.е. необходимо 179/185 представить в виде суммы аликвотных дробей (в Египте дроби обозначались  **- 1/10** и т.д.)

Нейгебаур ввел обозначения ½ ~ $\overline{2}$ (в этих лекциях обозначим как 2^).

Получение аликвотной дроби

1. 19 : 8 (в знаменателе $8=2^3$ – степень 2):

1 8
2 / 16
2^ 4
4^ / 2
8^ / 1

19 = 16 + 2 + 1 → 19 : 8 = 2 + 4^ + 8^ = 2 + 1/4 + 1/8

2. 180 : 250 (папирус Райнда):

1 250

2^ / 125
5^ / 50
(50)^ / 5

180 = 125 + 50 + 5 → 180 : 250 = 2^ + 5^ + (50)^ = 1/2 + 1/5 + 1/50

3. 5 : 12 (искусство подбирать верные дроби в условиях неоднозначности):

1	12	1	12
3^	/ 4	6^	/ 2
12^	/ 1	4^	/ 3

5=4+1=2+3 → 5:12 = 1/3 + 1/12 = 1/6 + 1/4

<u>Египетская таблица опорных дробей</u>

- египтяне сумели разложить т.н. *опорные дроби* – дроби вида 2/k ($k \le 101$, нечетные) на аликвотные для урегулирования процесса подбора дробей:

$$2/k = 1/k_1 + 1/k_2 + \ldots$$

<u>Пример</u>: 11/15 = (8+2+1)/15 = 8/15 + 2/15 + 1/15 (2/15 – опорная, 1/15 – аликвотная); 8/15 = (2*4)/15; 4/15 = (2*2)/15 = $2/k_1 + 2/k_2$ → 8/15 = $2/k_3 + 2/k_4 + 2/k_5 + 2/k_6 = 1/m_1 + \ldots$ (все из аликвотных дробей).

Задачи на исчисление кучи

Это задачи 24-38 из папируса Райнда. Задачи с одним неизвестным («аха» – егип. «куча» - неизвестное, икс). Во всех задачах переменные имеют содержательное значение, кроме этих (задач о куче): здесь просто «найти неизвестное».

$$a_1x + a_2x + \ldots + a_nx = b$$

<u>Задача 34</u>: куча и ее половина и ее четверть составляют десять.

$$x + ½\, x + ¼\, x = 10$$

Решение записано так:

/ 1	1 2^ 4^	(*)
2	3 2^	
/ 4	7	
/ 7^	4^	(**)
4^ (28)^	2^	
/ 2^ (14)^	1	

Ответ (верный): 5 2^ 7^ (14)^

(*) x = 1: 1 + 1/2 + 1/4
x = 2: 3 + 1/2
x = 4: 7

(**) x = 1/7: 4^
x = 2/7 = 1/4 + 1/28: 2^ (разложение по таблице 2/7)
x = 4/7 = 1/2 + 1/14: 1 (разложение по таблице 4/7)

16.09.05 [Лекция 3]

<u>Задача на прогрессию</u>: наставления как определить разности. Раздели 10 мер хлеба на 10 человек так, чтобы разность между мерой одного и мерой следующего за ним для каждого была равна 1/8.

Решение: средняя доля есть одна мера. Вычти ее из 10. Остаток есть 9. Составь половину разности – 1/16. Возьми ее 9 раз – 9/16 = 2^ (16)^. Приложи это к средней доле и вычитай для каждого лица по 1/8 меры, пока не достигнешь конца. Т.е. при заданных s и d:

$$a_1 = s/n + d(n-1)/2$$

$$s = n/2*(a_1 + \underbrace{a_1 + d(n-1)}_{a_n})$$

<u>Задача о путешественнике</u>: есть 7 домов, в каждом по 7 кошек, каждая съела по 7 мышек, каждая мышка съела по 7 колосьев, каждый колос дал бы 7 мер зерна. Найти общее число домов, кошек, мышей, колосьев и мер зерна.

Решение 1:

дома	7
кошки	49
мыши	343
колосья	2401
меры	16807
вместе:	19607

Решение 2:

/ 1	2801
/ 2	5602
/ 4	11204
Вместе:	19607

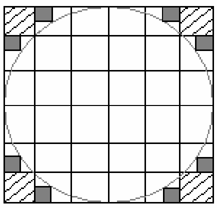
* Второе решение показывает, что египтяне понимали геометрическую прогрессию: непонятное число 2801 есть не что иное, как $(q^n - 1)/(q - 1)$ при $q = 7$, $n = 5$ в формуле: $s_n = a_1*(q^n - 1)/(q - 1)$, где $a_1 = 7$.

Геометрические знания египтян

В связи с тем, что знания геометрии накапливались в процессе решения практических задач, эти знания оказываются достаточно разрозненными.

1. Вычисление площадей треугольника, прямоугольника, трапеции (при том, что понятия «фигура» еще не существует, но есть поле – прямоугольник и т.д.);
2. Вычисление объема усеченной пирамиды с квадратным основанием (стороны оснований a и b): $V = (h/3)*(a^2 + ab + b^2)$ – из Московского папируса;
3. Построение прямого угла при помощи веревки с узелками на одинаковых расстояниях 3, 4, 5 (при растягивании такой веревки образуется прямоугольный треугольник);
4. Теоремы Пифагора не знали;
5. Вычисление площади круга (задача 50 из папируса Райнда): $S = ((8/9)*d)^2$. Из этой формулы $\pi = 3{,}16\ldots$ Это почти точно, но как додумались до этой формулы – неизвестно.

   Гипотеза Райка:
   - Сторону квадрата площадью S делим на 6 частей (получаем сетку 6x6);
   - Вычитаем четыре угловых квадрата со сторонами d/6. Площадь полученной фигуры равна $S_1 = S - 4*S_{d/6}$;
   - Вычитаем по два прилежащих к угловым квадратика со сторонами d/9. Площадь полученной фигуры равна $S_2 = S_1 - 2*4*S_{d/9}$;
   - И так далее;
   - $S_1 = d^2 - 4*(1/6)^2*d^2 = d^2(1 - 1/9)$
     $S_2 = S_1 - 8*(1/9)^2*d^2 = d^2[(1 - 1/9) - 1/9*(1 - 1/9)] \ldots$



➔ В Египетской математике содержит много довольно сложных формул, но отсутствует систематика и доказательства.

<u>МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО ВЫВИЛОНА</u>

- Вавилонянами считаются народности, жившие в долинах рек Тигра и Евфрата: аккадяне (город Аккад), шумеры и др. Все, кроме шумеров (арабские корни) говорили на семитическом языке;
- 4 век до н.э. – письменность шумеров (пиктография, глина, обжег);
- 3-4 века до н.э. – клинопись (▼ – 1, ◄ – 10);
- До середины 2 века н.э. Вавилон существовал как небольшие разрозненные государства;
- 24 век – Саргон (аккадский царь, объединивший Вавилон). Аккадская правящая династия просуществовала около 100 лет;
- 25 век – Шумерское правление (город Ура);
- …
- Эпоха расцвета Вавилона наступает при шестом царе Хаммурапи. Язык шумеров уступает место аккадскому и омертвевает (как латынь), при этом возникает множество *терминов* математики, медицины и шумерский становится абстрактным языком.
- Около 150 математических текстов и 200 математических таблиц обнаружены на глиняных табличках. Их изучали Нейгебаур, Гинкс и другие вавилонисты. В математических клинописных текстах были обнаружены теорема Пифагора и уравнения второй степени.

Вавилонская нумерация

Гинкс (Hinks) – англичанин, исследовавший одну табличку и сумевший понять, что она изображает прирост лунного диска от новолуния (60-чная нумерация).

Нейгебаур (гипотеза): шумеры использовали различные меры (шекель, талан и др.) Это были меры не только веса, но и денег (серебра), причем:

1 талан = 60 мин; 1 мина = 60 шекелей;

2 мины 30 шекелей → 2-30 → 230 (60-ричное)

Пример: << | | | = 2*10 + 3 = 23

| | << | | | = 2*60 + 2*10 + 3 = 143

< | | << | | | = 1*600 + 2*60 + 2*10 + 3 = 743

→ **Позиционная система счисления** (одно и то же, стоящее на разных местах означает разное). Минус этой системы в отсутствии НУЛЯ (< | это 11 или 11*60 или $11*60^2$ или 11/60 или $11/(60)^2$ и т.д. понималось исключительно из контекста). Ноль вскоре был придуман астрономами.

Арифметические задачи:

- $\sum_{k=0..n} 2^k = 2^n + (2^n - 1)$
- $\sum_{i=1..n} i^2 = (1/3 + n*2/3)N$, где $N = \sum_{i=1..n} i$

Алгебраический метод:

- Много задач с уравнениями 1 и 2 степеней. Хаммурапи – уравнения с 2 неизвестными: длина, ширина. Третье неизвестное – глубина (высота). $x*y$ – площадь; x^2, y^2 – площади квадратов; $x*y*z$ – объем. Но встречаются и выражения вида $x + xy + xyz$, т.к. x, y, z превратились в термины.
- Существует обратное $1/x$;
- Почти все задачи решаются в числах, поэтому плохо просматривается общность.

Квадратные уравнения:

Задача: площадь квадрата, прибавленная к его стороне равна 45 мин (45/60).

$$x^2 + x = 3/4$$

* Т.к. в этимологии x – длина, то искали только положительные корни, отрицательных чисел вавилоняне не знали и рассматривали типы квадратных

уравнений только с положительными коэффициентами (перенос в правую часть всего отрицательного).

$$x^2 + px = q \ (p, q > 0)$$

Решение:

1	p
1/2 = 30/60	p/2
30/60 * 30/60 = 1/4	$p/2 * p/2 = p^2/4$
1/4 + 45/60 = 1	$p^2/4 + q = \delta$
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{\delta}$
1 – 1/2 = **1/2**	$\boldsymbol{\sqrt{\delta} - p/2}$

или $x^2 + px = q \quad | + p^2/4$

$x^2 + px + p^2/4 = q + p^2/4$ – «это квадрат»

$(x + p/2)^2 = q + p^2/4$

→ Выделение полного квадрата.

* Для каждого типа квадратных и кубических уравнений существовал свой способ (метод) решения.

Системы уравнений:

- Найти стороны прямоугольника, если известны его полупериметр p и площадь q:
  2p, q → $\begin{cases} x + y = p, \\ x*y = q; \end{cases}$
- Найти катеты треугольника по площади и гипотенузе:
  $\begin{cases} x*y = a, \\ x^2 + y^2 = b; \end{cases}$

Кубические уравнения:

- Определить ребра прямоугольного параллелепипеда по его объему и площадям граней:
  $\begin{cases} xyz + xy = a, \\ y = bx, \\ z = cx; \end{cases}$ → Система сводится к кубическому уравнению.

Теорема Пифагора: Нейгебаур в одной из таблиц нашел очень много пифагоровых троек (просто их набор), причем таких, что можно было сделать вывод о том, что вавилоняне знали алгоритм Евклида их нахождения (3,4,5 и * их на какое-либо число – 72, 65, 97; 3456, 3367, 4825 и т.д.):

$$\begin{cases} x = 2pq, \\ y = p^2 - q^2, \\ z = p^2 + q^2; \end{cases}$$

Т.о. вавилоняне знали теорему Пифагора.

→ Знания вавилонян о 60-чной системе счисления, квадратных уравнениях и Пифагоровой теореме продвинули математику и астрономию. И в работах греков видны следы вавилонской математики.

23.09.05 [Лекция 4]

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

Подлинного расцвета математика достигла в Древней Греции, т.к. там из системы разрозненных правил возникает строгая, систематическая теория математики.

Примерно в 13 веке до н.э. в Греции начинают образовываться города-государства (полюсы), развивается демократия (выборы, голосование). На фоне этого возникает ораторское искусство как и искусство говорить, убеждать, т.е. доказывать свою правоту → в математике появляется *доказательность*.

Фалес Милетский – считается основателем греческой математики.

Греческая нумерация

Нумерация в Греции основывалась на аддитивном принципе и была исключительно отсталой. Различают два ее вида:

1. *Гердиана* – почти римская нумерация, ее еще называют *аттической*, т.к. она связана со счетами (доска: abacus). Ноль не появлялся очень долго, т.к. на счетах не было камня ему соответствующего.

   I – 1, II – 2, III – 3, IIII – 4, Г – 5, Δ – 10; ГI – 6, ΔГ – 15.

   До нас практически не дошли никакие греческие источники. Есть лишь несколько отрывистых сведений из александрийских папирусов. Но историкам и по ним удалось создать некоторую связную теорию.
2. Потом аттическая нумерация сменилась на другую, основанную на греческом алфавите, но не менее отсталую (для отличия цифр от букв над символами, означающими цифры ставили вертикальную черту):

   $\overline{\alpha} – 1,\ \overline{\beta} – 2,\ \overline{\gamma} – 3,\ \overline{\iota} – 10,\ \overline{\tau} – 300.$

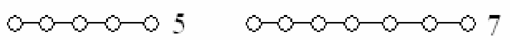
Математические школы Древней Греции

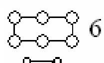
1. <u>Ионийская школа</u> (Иония – ныне город Милей в Малой Азии) – связана с именами Фалеса и двух его учеников Анаксимена и Анаксимандра.

   Утверждения:
   - Вертикальные углы равны;
   - Угол, опирающийся на диаметр – прямой;
   - Углы при основании равнобедренного треугольника равны;
   - Диаметр делит круг пополам – примерно в 600 г. до н.э. Первые доказательства (рисуется круг, диаметр, сгибается пополам - совпадает);
   - Признак равенства треугольников по стороне и двум прилежащим углам – считается, что это утверждение связано с задачей определения расстояния до корабля в море: человек стоит на скале, далеко в море находится корабль. Со скалы спускается отвес, высчитывается угол α, переносится на чертеж и находится расстояние.

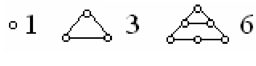
   

2. <u>Школа Пифагорейцев</u>

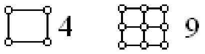
   Пифагор – ученик Фалеса и Анаксимандра, философ (размышлял о сущности бытия), астроном (считал, что Земля движется вокруг Солнца: учение Коперника называют пифагорейским), диалектик (развитие мира происходит из противоположностей). Союз пифагорейцев возник как некоторая политическая партия, провозглашающая борьбу против падения нравов. Сохранилось много трудов Пифагора и его школы (585 – 400 г.до н.э.). Тезис Пифагора: «Все есть число». Он (Пифагор) сделал выдающийся вклад в **теорию чисел**.
   - Основным числом считается единица, все же остальные составляются из нее; она отделяет натуральные числа от дробных единиц;
   - Все можно выразить числом или отношением чисел;
   - Числа могут быть:
     1. Линейными: 

     2. Плоскими: 

     3. Телесными: 

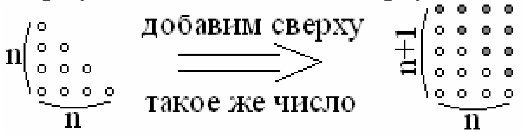
     4. Треугольными: 

        (1, 3, 6, 10, 15, …)

5. Квадратными: 

(4, 9, 16, 25, …)

- Формула нахождения n-го треугольного числа:



→ Получим прямоугольное число с основанием n и высотой n+1 равное n*(n+1). ➔ Треугольное число 1+2+3+…+n = **½ n(n+1)**

- *Законы*:

1. Умножение: ab = ba ;
2. Дистрибутивность: a(b+c) = ab + ac;
3. Произведение двух чисел четно тогда и только тогда, когда одно из этих чисел четно;

* В 9 книге Евклида есть целый раздел, посвященный изучению свойств чисел, отличающийся архаичностью.

* Сложность решаемых Пифагором задач соизмерима со сложностью нынешних:

- *совершенные числа* (числа, равные сумме своих делителей: 6=1+2+3);
- *дружественные числа* (два числа такие, что сумма собственных делителей одного равна другому: 220, 284).

4. <u>Теорема</u>: если $p=1+2+2^2+\ldots+2^n$ – простое, тогда 2^n*p – совершенное (Излагается у Евклида, доказана Пифагорейцами).
   <u>Доказательство</u>: для доказательства совершенности числа рассматриваются его делители: 1, 2, …, 2^n; p, 2*p, 2^2*p, …, 2^{n-1}*p (других быть не может, т.к. p - простое) + признак четности (закон 3).

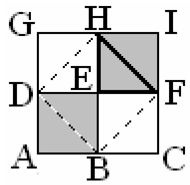
* Последнее простое число найдено американским ученым математиком. Сейчас известно и самое большое совершенное число. Примерно через 2000 лет (от Пифагорейцев) Эйлер доказал, что никаких других четных совершенных чисел быть не может. Известно, что до 10^{51} нечетных совершенных чисел нет, но не известно есть ли такие дальше.

- *Пифагоровы тройки* ($x^2+y^2=z^2$) – существуют таблицы таких троек, дошедшие до нас. Пифагорейцам было известно правило получения таких чисел на основе однопараметрического семейства вида:

$$\begin{cases} x = 1/2(m^2 - 1), \\ y = m, \\ z = 1/2(m^2 + 1); \end{cases}$$

* Числа, встречающиеся в египетских папирусах не могли быть построены без этого правила; оно же было ключевым при построении теоремы Пифагора.

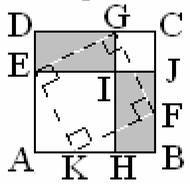
- *Теорема Пифагора* – доказательство до нас не дошло, поэтому неизвестно, умел ли сам Пифагор доказывать свою теорему. Однако, считается, что все-таки умел: до нас дошел орнамент; есть некоторые основания полагать, что он связан с доказательством этой теоремы.



Пусть есть прямоугольный равнобедренный треугольник (HEF). Площадь двух квадратов EHIF и EDAB, построенных на катетах, равна площади квадрата DHFB, построенном на гипотенузе, т.к. до площади большого квадрата AGIC и тем и тому не хватает четырех треугольников:

$$S_{EDAB} + S_{EHIF} = S_{DHFB}$$

Считается, что пифагорейцы сначала увидели пифагоровы треугольники, перенесли на равнобедренные треугольники, а затем рассмотрели более общий случай неравнобедренного треугольника:



$$S_{EDGI} = S_{HIJB};\ \ S_{EGFK} = S_{ADCB} - 4*S_{KFB}$$

- Первый **кризис** в истории математики: пифагорейцы открыли, что существуют несоизмеримые отрезки и иррациональные числа.
  Теорема: гипотенуза прямоугольного треугольника несоизмерима с его катетом.
  Доказательство: $2^{1/2}$ – иррационально. Пусть это не так, тогда его, как рациональное число, можно представить в виде несократимой дроби: $2^{1/2} = m/n$. Откуда $2 = m^2/n^2$, $m^2 = 2n^2$, т.е. m^2 – четно, а значит и m – четно ($m = 2k$). Подставив, получаем $2 = 4k^2/n^2$,Ю откуда $n^2 = 2k^2$, т.е. n – четно. Получили, что n и m четны, т.е. дробь m/n можно сократить, а это не так – противоречие.
  * Есть легенда о том, что иррациональность открыл один из пифагорейцев **Гипазий**, когда они плыли на корабле. За это его открытие свои же пифагорейцы выбросили его за борт.
- *Теория решения пропорций* (связана с иррациональностью $2^{1/2}$):
  Существует три ключевых отношения:
  1. Арифметическое среднее: $(a – b)/(b – c) = a/a$;
  2. Геометрическое среднее: $(a – b)/(b – c) = a/b$;
  3. Гармоническая (музыкальная) пропорция: $(a – b)/(b – c) = a/c$.

  * Пусть есть 2 струны: $l_1 = 12$, $l_2 = 6$. Соотношение 2:1 – октава. Среднее арифметическое – 9; 12:9 = 4:3 – квинта. Гармоническая пропорция – 8; 12:8 = 3:2 – кварта.
  * Большое количество горшков устанавливали в ряд, заполняли различным количеством жидкости, составляя пропорции, стучали по горшкам и искали красивое звучание (возникли кварта, квинта и др. интервалы).

3. <u>Элейская школа</u> (связана с именами математика Парменида и его ученика Зенона) – ученые мужи думали как преодолеть кризис математики, связанный с иррациональностью. До нас дошли **9 апполий Зенона** (парадоксов), среди которых:
   - Ахиллес и черепаха;
   - Стадион;
   - Дихотомия – атомарный подход к математике (если есть неделимые частицы → нужно сложить бесконечное число частиц → не может получиться конечное число → парадокс); возникает ряд ½ + ¼ + 1/8 +… То, что сумма его равно единице не знали.
   - Стрела – мгновенная скорость (об этом парадоксе говорил Ньютон: в каждый отдельный момент времени стрела находится в определенном положении → не летит).
4. <u>Софийская школа</u> (связана с именем Сократа и его учеников начало 5 века до н.э.)

Софисты – мудрецы, странствующие учителя, обучавшие других ораторству и этим зарабатывавшие себе на жизнь. Они учили рассуждать, используя для этого множество учебных задач. Они ввели задачи:

I. *О квадратуре круга* – построить квадрат, равновеликий заданному кругу;
II. *Об удвоении куба* – построить куб, объемом вдвое больше заданного;
III. *О трисекции угла* – разделить угол на три части с помощью циркуля и линейки.

07.10.05 [Лекция 5]

I. **Задача о квадратуре круга**

Эта задача сводится к следующей: по заданному отрезку d отложить отрезок πd с помощью циркуля и линейки (или просто *построение отрезка длиной π* при d=1):

$$S = \pi R^2 = \pi(d/2)^2 = d/4*\pi d$$

Получается прямоугольник, а из него квадрат с той же площадью. Легко.

- Впервые задачу ставит **Анаксимандр**;
- Антифон и Бризон – двое софистов, придумавшие первый *метод* решения этой задачи:

  Антифон: вписать в круг квадрат, потом 6-угольник, потом 8, 16, … (правильные) и приблизить длину окружности.

  Бризон: не только вписывать, но и описывать правильные многоугольники, удваивая число сторон.
- **Архимед** «Квадратура круга» - установил 3 утверждения:
  a. Каждый круг равновелик прямоугольному треугольнику, один катет которого равен R, а другой – выпрямленной длине окружности;
  b. $S_{круга}/d^2 \approx 11/14$;
  c. $(3+10/71)d < C < (3+1/7)d$ (C – длина окружности);

  Т.о. Архимеду удалось оценить длину окружности с большой точностью. Он вписывал и описывал правильные многоугольники, начиная с 6, потом 12, 48, 96. Теорема Пифагора вела к формуле связи длины стороны правильного 2n-угольника со стороной правильного n-угольника. Архимед умел пользоваться этой формулой и при округлении для внутренних многоугольников уменьшал дроби, а для внешних – увеличивал → доказанные оценки снизу и сверху.
- Архимедовскую техник у вычислений превзошел только индийский математик **Ариабхата**, получивший оценку числа $\pi \approx 62832/20000 \approx 3{,}1416$. Он поступал так же, как и Архимед (12, 24, 48, 96), но более высокая техника вычислений позволила индийцу вписать 192 и 384-угольники.
- 12-13 век. Европа. Леонардо Пизанский (**Фибоначчи)** тоже получил число π, но менее точно.
- **Франсуа Виет** продвинулся в этой задаче. Он увидел, что площадь большего вписанного в круг многоугольника относится к площади меньшего так же, как диаметр окружности относится к хорде,

дополнительной к стороне меньшего вписанного многоугольника. Начав с 4-угольника он нашел: S_8/S_4, S_{16}/S_8, S_{32}/S_{16}. Потом, перемножив все, получил приближенно формулу отношения S_4/S_∞, из которого:

$$\pi \approx \frac{2}{\sqrt{1/2}\cdot\sqrt{1/2+1/2\sqrt{1/2}}\cdot\sqrt{1/2+1/2\sqrt{1/2+1/2\sqrt{1/2}}}\cdots} \approx 3{,}14159265458 \text{ (9 знаков!)}$$

- **Рудольф Ван Цейтлен** считал по этой формуле и получил 20, а затем и 35 знаков числа π.
- **Ньютон, Лейбниц** заложили основы дифференциального исчисления. Лейбниц указал ряд:

$$\mathrm{arctg}\, x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$$
$$\mathrm{arctg}\, 1 = \pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$$

Но этот ряд сходился слишком медленно, и для достижения нужной точности числа π необходимо рассмотреть кучу знаков (для π до 0,001 необходимо рассмотреть 1000 членов ряда).

Довольно быстро догадались, что:

$$\pi/4 = 4\mathrm{arctg}(1/5) - \mathrm{arctg}\,(1/239)$$

Теперь сходимость очень быстрая, проще получить нужную большую точность (до 200 знаков после запятой за 2 мес. по формуле $\pi/4 = \mathrm{arctg}(1/2) + \mathrm{arctg}(1/5) + \mathrm{arctg}(1/8)$).

Но все эти вычисления не давали способа построения числа π с помощью циркуля и линейки, а ведь именно в этом заключается задача о квадратуре круга!

- Прорыв был сделан **Эйлером** (именно он назвал это число числом π), который увязал трансцендентность и иррациональность чисел e и π:

$$e^{i\pi} = -1$$

- **Фурье** доказал, что число e иррационально:

$$e = 1 + 1/1! + 1/2! + 1/3! + \ldots + 1/n! + \ldots$$

Доказательство: пусть это не так, тогда число e, как рациональное, можно представить в виде $e = p/q$, тогда:

$$p/q = 1 + 1/1! + 1/2! + \ldots + 1/q! + 1/(q+1)! + 1/(q+2)! + \ldots$$

Помножим обе части на q!, перенеся в левую часть все до 1/q!. Тогда в левой части окажется целое число, а в правой:

$$1/(q+1) + 1/(q+1)(q+2) + 1/(q+1)(q+2)(q+3) + \ldots \le$$
$$\le 1/(q+1) + 1/(q+1)^2 + 1/(q+1)^3 + \ldots =$$

(сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии)

$$= [\ 1/(q+1)\ ]*[\ 1/(1-1/(q+1))\ ] = 1/q$$

Т.е. целое число = 1/q, а это невозможно – противоречие.

- **Ван Берг** доказал, что если x – ненулевое рациональное число, то e^x – иррационально. Из этого утверждения доказывается иррациональность числа π. Но это не значит, что его нельзя построить ($2^{1/2}$ – тоже иррационально, но построить его можно).
- **Леувилль** (1840) доказал, что не существует таких рациональных чисел a, b, c, что число e является корнем уравнения:

$$ae^2 + be + c = 0$$

Т.е. впервые зашел вопрос о трансцендентности. Люди начали задумываться о связи решений квадратного уравнения с рациональными коэффициентами с решением задачи о квадратуре круга. Составлялись цепочки квадратных уравнений: из уравнения с рациональными коэффициентами получаем иррациональность I рода; подставив ее в качестве коэффициентов в уравнение, получаем иррациональность II рода и т.д.

- **Эрмит** доказал, что существуют равенства:

$$N_1 e^{x_1} + N_2 e^{x_2} + \ldots + N_m e^{x_m} = 0$$

где $N_1, N_2, \ldots$ – натуральные числа;
$x_1, x_2, \ldots$ – рациональные числа;
e – корень.

- **Линдеман** (1882) доказал, что если z – корень неприводимого алгебраического уравнения, то e^z – иррационально.

➔ Число π не является корнем неприводимого алгебраического уравнения, т.е. π нельзя построить с помощью циркуля и линейки, и задача о квадратуре круга *неразрешима*.

II. **Задача об удвоении куба**
Эта задача сводится к следующей: по единичному отрезку построить $2^{1/3}$, или можно ли операцию извлечения кубического корня свести к конечному числу операций извлечения корня квадратного?

- **Гиппократ** из Хеоса свел решение этой задачи к нахождению абсциссы точки пересечения двух парабол:

$$x^2 = ay \quad \text{и} \quad y^2 = 2ax$$

- **Декарт** (1637) предположил, что задачу возможно решить.
- **Ванцель** (1837) доказал, что кубический корень не принадлежит ни полю рациональностей, ни его расширению присоединением корня квадратного.

➔ Задача об удвоении куба *неразрешима*.

III. **Задача о трисекции угла**

- Софист **Гиппий** придумал специальную кривую, построив которую можно решить задачу (квадратрисса).
- **Ванцель** доказал, что задача сводится к кубическому уравнению:

$$\cos\varphi = 4\cos^3(\varphi/3) - 3\cos(\varphi/3) \text{ или } 4x^2 - 3x = a$$

и что это невозможно.

➔ Задача о трисекции угла *неразрешима*.

Хоть все три задачи в итоге оказались неразрешимыми, но попытки их решения способствовали развитию математики Древней Греции.

5. <u>Платоновская академия</u>

Платон (127 – 347 г. до н.э.) – ученик Сократа, живший во время упадка Афин. Его академия просуществовала до 529 г. н.э. (была закрыта за чуждые языческие идеи). Это было учебное заведение с прогулками и беседами учеников и учителей.

- *5 Платоновых тел* (правильные многогранники: куб, тетраэдр, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр) – с каждым из них связывали свою стихию: вода, воздух, земля, огонь и т.д.
- **Аристотель** – знаменитый ученик Платона, учитель Александра Македонского. Он пытался понять связь математики с внешним миров, подчеркивая, что математика не возникает на пустом месте (несуществующие в природе предметы можно изучать, но это не имеет смысла). Именно Аристотель разделил математику на аксиомы, теоремы и т.д., заложил основы дедуктивного метода.

«Определение не гарантирует существования»;
«Знать – это установить с помощью доказательств»;
«Множество натуральных чисел имеет бесконечную мощность по отношению к сложению».

6. <u>Александрийская школа</u>

К ней принадлежали множество великих ученых. Далее будут подробно рассмотрены труды семи из них: Евклид, Аполоний, Архимед, Птолемей, Герон, Диофант. Так же к этой школе относились Прокл и женщина-математик Гепатия.

14.10.05 [Лекция 6]

МАТЕМАТИКА АЛЕКСАНДРИЙСКОЙ ШКОЛЫ

«Начала» Евклида

Труды **Евклида** подводят черту под всем сделанным ранее и открывают возможности для движения вперед. Поэтому всю математику разделяют на доевклидову и послеевклидову.

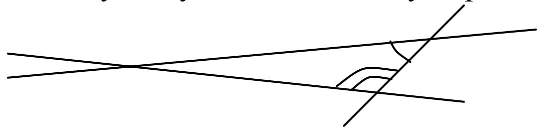
Книга «Начала» Евклида не сохранилась, но нам доступен ее перевод. Это 15 книг, из которых мы будем рассматривать первые 13. Ученые спорят, все ли эти 13 книг написаны самим Евклидом, или же часть имеет авторами его учеников? Сходятся в одном – все книги написаны в один период времени.

Евклид – вавилонянин, живший в Александрии в 3 в. до н.э. (в период упадка городов). Книгу «Начала» он написал на греческом языке. Эта книга является образцом математической строгости. Она подвела итог под всей доевклидовой математикой и дала стимул к ее дальнейшему развитию.

Приводятся высказывания историка **Прокла**: «Многое в своей книге Евклид взял из Евдокса, Теэтэта; но, не смотря на это, Евклид дал неопровержимое доказательство всего того, что его предшественники доказали нестрого».

1..4 книги: Геометрия на плоскости

- Содержат свойства прямых и окружностей; задачи, в которых решение достигается с помощью циркуля и линейки.
- Основные *понятия*:
  - Точка есть то, что не имеет частей;
  - Линия – это длина без ширины;
  - Прямая линия есть та, которая равнорасположена к точкам на ней;
  - Поверхность есть только то, что имеет длину и ширину.
- *5 основных постулатов*:
  1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую;
  2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить до прямой;
  3. Из всякого центра и всяким расстоянием может быть описан круг;
  4. Все прямые углы равны между собой;
  5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньше двух прямых (меньше развернутого угла), то неограниченные продолжения этих двух прямых встретятся с той стороны от первой прямой, где сумма углов меньше двух прямых (развернутого).



- *Аксиомы*
  - Равные одному и тому же равны между собой;
  - Если к равным прибавляются равные, то и целые будут равными;
  - Если к неравным прибавляются равные, то целые будут неравными;
  - Удвоенные одного и того же, половины одного и того же, совмещающиеся друг с другом равны между собой;
  - Две прямые не содержат пространства.
- **1 книга: Доказательства элементарных свойств треугольника**
  - Треугольники равны, если они совпадают при наложении;
  - Построение биссектрисы, серединного перпендикуляра;

- Понятие площади и выяснение являются ли различные фигуры равновеликими (техника);

- **2 книга: Геометрическая алгебра**

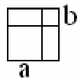
  Все величины, рассмотренные в этой книге, представлены геометрически, и все операции заменены геометрическими операциями:

  Число – отрезок;

  a*b – прямоугольник;

  a*b*c – параллелепипед и т.д.

  Пример: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



- **3 книга: Геометрия окружности;**
- **4 книга: Правильные многоугольники**, вписанные и описанные около окружности.

<u>5 книга: Теория пропорций</u>

Более высокий уровень, чем в 1..4 книгах (там элементарные вещи). В это время был кризис несоизмеримых величин, и была задача его обойти. Прокл «5 книга Евклида заимствована у Евдокса».

Раньше m/n рассматривали как отношение соизмеримых элементарных единиц. Евклид же поставил теорию пропорций на службу математике вообще.

Считается, что именно Евклид ввел понятие *действительных чисел*, хотя явно об этом и не говорится.

- *Определения*
  - Часть есть величина от величины, меньшая от большей, если она измеряет большую;
  - Кратное же большее от меньшей, если оно измеряется меньшей;
  - Отношение есть некоторая зависимость двух однородных величин по количеству (принцип однородности: нельзя складывать длину и объем, объем и площадь и т.д.);
  - Говорят, что величины имеют отношение между собой, если они, взятые кратно, могут превзойти друг друга (аксиома Архимеда);
  - Говорят, что величины находятся в одном и том же отношении I-я ко II-й и III-я к IV-й, если равнократные I-ой и III-ей одновременно больше, равны или меньше равнократных II-ой и IV-ой каждая к каждой, и какой бы то ни было кратности, если взять в соответствующем порядке:

    a/b = c/d, если для любых целых m, n выполняется одно из трех:

    $$\begin{cases} m*a > n*b, \\ m*c > n*d; \end{cases} \quad \begin{cases} m*a = n*b, \\ m*c = n*d; \end{cases} \quad \begin{cases} m*a < n*b, \\ m*c < n*d; \end{cases}$$

    * Евклид избегает чисел вообще и не рассматривает их. Поэтому он и избегает конфузов, связанных с несоизмеримостью. Он строит теорию обращения с отношениями.

    Последнее определение есть задание отношения эквивалентности на множестве отношений m/n. А оно разбивает это множество на классы эквивалентности, а это действительные числа. Необходимо отношение порядка. Евклид его задает.

- *Теоремы* (всего около 20)
  - $a/b = c/d \rightarrow ma/nb = mc/nd$
  - $a/b = c/d = e/f \rightarrow a/b = e/f$
  - Отношение m/n делит множество рациональных чисел на 2 класса: числа > m/n и числа < m/n.

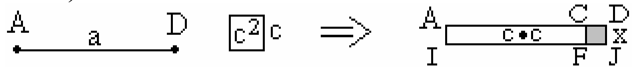
<u>6 книга: Теория пропорций в применении к прямолинейным фигурам + некоторые задачи на приложения</u>

Задача: заданы некоторый отрезок длины a и некоторая площадь c^2. Надо построить такой прямоугольник, чтобы одна из его сторон была равна a, а площадь его была равна сумме c^2 и площади квадрата со стороной, равной другой стороне этого прямоугольника.

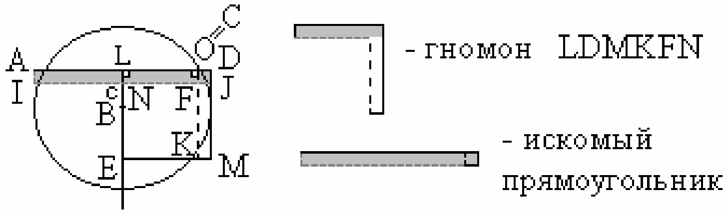
Эта задача сводится к нахождению решения квадратного уравнения:

$$ax - x^2 = c^2$$

с помощью циркуля и линейки (эллиптическая задача с недостатком на приложение площадей).



Решение:



1. Проведем серединный перпендикуляр к AD (L - середина), построим квадрат со стороной a/2 (LDME) и отложим на LE сторону квадрата c (получим точку B);
2. Очертим окружность из точки B радиусом a/2 и в пересечении ее с AD (точка O) проведем перпендикуляр к AD (OK);
3. Отложим OD на стороне DM квадрата (получим точку J);
4. Точка O и есть искомая точка C, а OD = DJ = x ($S_{ODJF} = S_{CDJF} = x^2$) и $S_{LDMKFN} = S_{ADJI}$ → x.

<u>7..9 книги: Теория чисел, делимость</u>

Теорема: множество простых чисел бесконечно.

Доказательство: пусть это не так, тогда множество простых чисел есть $p_1, p_2, \ldots, p_N$ (1). Между тем, число $(p_1 * p_2 * \ldots * p_N) + 1$ тоже простое, но оно не содержится в множестве (1) – противоречие.

<u>10 книга: Классификация квадратичных иррациональностей в геометрических величинах</u> (Теэтэт)

- $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
- $\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$

→ Реальная помощь в решении задач с несоизмеримостями.

<u>11 книга: Стереометрия;</u>

<u>12 книга: Метод исчерпывания нахождения площадей криволинейных фигур</u> (Евдокс);

<u>13 книга: Построение Платоновых тел</u> (правильных многогранников).

21.10.05 [Лекция 7]

Аполоний

Аполоний жил в городе Перги в 260 – 170 г. до н.э. Он написал несколько трудов, из которых сохранился единственный – **«Конические сечения»** 7 из 8 книг.

Конические сечения начали изучать в 4 веке до н.э.. Гиппократ придумал способ решения задачи об удвоении куба: найти с помощью циркуля и линейки такие x, y, что a/x = x/y = y/2a. **Менехем** (ученик Евдокса) в свою очередь свел эту задачу к задаче о нахождении точки пересечения параболы и гиперболы или двух парабол:

$$x^2 = ay,\ xy = a*2a \quad \text{или} \quad x^2 = ay,\ y^2 = x*2a$$

так возникли впервые конические сечения.

Полагают, что когда Менехем вводил параболу и гиперболу – он опирался на аналогию с окружностью $y^2 = x(d – x)$. Если заменить в этой формуле d-x на константу, то получится парабола (а пересечение двух парабол решит задачу).

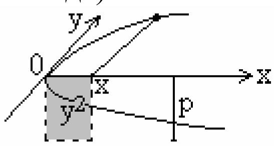
Если конус рассечь плоскостью, параллельной одной из его образующих, то можно получить *3 вида сечений*: эллипс, парабола и гипербола. **Аполоний** получал все три эти сечения только с остроугольным конусом:

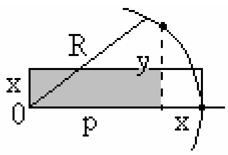
- Если секущая пересекает все образующие – эллипс;
- Если секущая параллельна одной из образующих – парабола;
- Если секущая пересекает обе части конуса – гипербола.

Аполоний первым установил характеристические свойства этих кривых (их **уравнения в** некоторой **системе координат**): пусть имеется некоторая косоугольная система координат x, y такая, что x – диаметр кривой, y – касательная к коническому сечению в точке пересечения кривой с диаметром. Тогда в этой СК (a – длина диаметра, p – некоторый параметр):

- $y^2 = 2px$ – парабола;
- $y^2 = x*(p – (p/a)*x)$ – эллипс;
- $y^2 = x*(p + (p/a)*x)$ – гипербола.

Получив эти уравнения, Аполоний сумел указать как рисовать эти кривые способом приложения площадей (Евклида):





Рисуем прямоугольник со сторонами p и x. Его площадь равна y^2. Находим y ($R_{окружн}$ = p+x) и откладываем его параллельно оси y из точки x.

* Но задача об удвоении куба не решена, т.к. нельзя построить касательную к параболе с помощью циркуля и линейки.

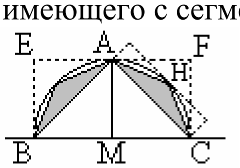
Так же Аполоний изучал оптические свойства этих кривых, находил фокусы, строил касательные и т.д.

<u>Архимед</u>

Архимед жил в городе Сиракузы. Это был великий ученый, механик, автор метода исчерпывания (приблизил число π), изучал центры тяжести тел, фактически, основоположник интегрирования.

Работы Архимеда:

- «О квадратуре круга»;
- «Письмо Эратосфену»;
- «О цилиндре и о шаре» - в частности, доказал, что объем цилиндра и вписанного в него шара выражаются в целых числах;
- «Квадратура параболы» – (выразил площадь параболы через площадь треугольника) произвольный сегмент, ограниченный прямой и параболой, равен учетверенной трети треугольника, имеющего с сегментом общее основание и высоту:



$S_{сегм\ MBAC} = 4/3\ S_{\Delta ABC}$

1. $S_{\Delta ABC} = 1/2\ S_{BEFC} > 1/2\ S_{сегм}$;
2. $S_{\Delta AHC} = 1/8\ S_{\Delta ABC}$;
3. … приближает сегмент.

→ В сегмент можно вписать такой многоугольник, что оставшиеся по краям сегменты можно будет сделать меньше любой наперед заданной положительной величины.

$$S_{\Delta ABC} + 1/4\ S_{\Delta ABC} + 1/4^2\ S_{\Delta ABC} + \ldots \text{ (геометрическая прогрессия)} = 4/3\ S_{\Delta ABC}$$

Но Архимед заканчивает на N-м члене прогрессии (на N-м шаге) и добавляет остаток до 4/3 $S_{\Delta ABC}$, показывая, что этот остаток стремится к нулю:

$$S_{\Delta ABC} + 1/4\ S_{\Delta ABC} + 1/4^2\ S_{\Delta ABC} + \ldots + (1/3)*1/4^{N-1}\ S_{\Delta ABC} = 4/3\ S_{\Delta ABC}$$

* Эта работа Архимеда применяется во многих древних работах.

28.10.05 [Лекция 8]

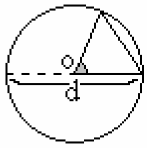
<u>Птолемей</u>

Период господства Рима. Рим завоевывает Сиракузы (212 г. до н.э.), Карфаген (146 г. до н.э.), Месопотамию (64 г. до н.э.), Египет (30 г. до н.э.) и устанавливает длительный мир в Евразии. В Александрии – центре математики того времени – господствовал рабовладельческий строй, не способствовавший развитию науки. Но длительный мир позволил установиться взаимному проникновению культур (между различными странами). Греки понимали, что геометрическая интерпретация алгебры мешает, тормозит развитие математики. Тогда бурно развивается астрономия и возникают новые задачи, связанные с ней.

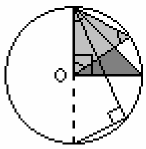
Птолемей (150 г. до н.э.) – великий астроном, создавший теорию геоцентрической системы мира (все небесные тела вращаются вокруг земли), которая просуществовала довольно долго, т.к. позволяла решить насущные задачи того времени.

<u>«Альмагест»</u> - главная работа Птолемея, в которой излагается эта теория и многое другое:

- Способ расчета орбит небесных тел по эпициклам;
- Стереографическая проекция и ее свойства;
- Именно в этом труде создана вся **тригонометрия** практически из ничего.
  Как связать хорды круга диаметра d с соответствующими углами? Птолемею понадобилась *таблица хорд*, а это почти таблица синусов.

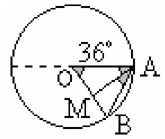


1. Птолемей предположил, что d состоит из 120 равных частей (r – из 60) – для удобства (астрономия). Окружность же он разбил на 360 равных частей (π находится в районе трех).



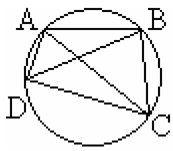
2. Затем Птолемей начал выражать углы в частях диаметра:
   - Хорда 60˚ = R = 60 частей;
   - Хорда 90˚ = $(2R^2)^{1/2} = (7200)^{1/2}$ = 84ч 51’ 10” (по теореме Пифагора);
     * Корни извлекались подбором по формуле $(a + x)^2 = a + 2ax + x^2$ (существовала таблица квадратов).
     * Необходимо было построить таблицу хорд с точностью до 0,5˚.
   - По теореме Пифагора + обратный угол = 60˚:
     $$(\text{хорда } \alpha)^2 + (\text{хорда}(180 - \alpha))^2 = \alpha^2$$
     (аналог **основного тригонометрического тождества**).
   - Хорда 120˚ = $((2*60)^2 - 60^2)^{1/2} = 60^2*3^{1/2}$ = 103ч 55’ 23”

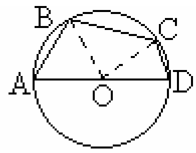
3. Дальше Птолемей рассматривает правильный 10-угольник, вписанный в окружность и ищет хорды 72° и 36°:



   - $\angle A = \angle B = 72^\circ$, т.к. треугольник равнобедренный;
   - Проведем биссектрису $\angle A \rightarrow \angle MAB = 36^\circ$;
   - $\angle AMB = 72^\circ \rightarrow \Delta AMB$ – равнобедренный $\rightarrow AM = AB$;
   - $\angle MAO = \angle AOB \rightarrow \Delta AOM$ – равнобедренный $\rightarrow AM = OM$;
   - Обозначим: $x = AM = AB = OM$;
   - ΔAOB подобен ΔMAB по трем углам $\rightarrow OB/AB = AB/BM$ или

     $R/x = x/(R - x)$ – **золотое сечение**
   - Хорда $36^\circ = 37^{\text{ч}}\ 4'\ 55''$;
   - Аналогично, хорда $120^\circ = 70^{\text{ч}}\ 32'\ 3''$;
4. Применяя основное тригонометрическое тождество к:
   - $36^\circ \rightarrow$ получает хорду 144°;
   - $72^\circ \rightarrow$ получает хорду 108°.
5. Далее Птолемей доказывает свою великую теорему о диагоналях вписанного в окружность четырехугольника (аналог формулы **синуса разности**): $AC*BD = AB*CD + BC*AD$:





   Пусть AD – диаметр окружности. Хорда BC отвечает разности углов, соответствующих хордам BD и CD:

   $$BC/AD = [\text{хорда}(\angle BD - \angle CD)]/120^{\text{ч}} = \text{хорда } BD * \text{хорда } AC - \text{хорда } AB * \text{хорда } CD$$

   (хорда AC – дополнительная к CD, а хорда AB – дополнительная к BD)

   Отсюда, зная хорды CD и BD, найдем BD – CD.

   $$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha*\cos\beta - \cos\alpha*\sin\beta$$

   По этой формуле, подставляя 60° и 72°, находим
   - хорду 12°.
6. Потом доказывает утверждение, эквивалентное формуле:

   $$\sin^2(\alpha/2) = (1 - \cos\alpha)/2$$

   с помощью которой, используя хорду 12°, находит
   - хорды 6°, 3°, $1{,}5^\circ$ и $0{,}75^\circ$.
7. Дальше Птолемей доказывает утверждение, эквивалентное следующему:

   если α и β таковы, что $0 < \alpha < \beta < \pi/2$, то $\sin\alpha / \sin\beta < \alpha / \beta$

   с помощью которого доказывает, что:

   $$4/3*\text{хорда } (3/4)^\circ > 1*\text{хорда } 1^\circ > 2/3*\text{хорда } (3/2)^\circ$$

   Т.е. дает оценку хорде 1° с точностью до $1''$
   - хорда $1^\circ = 1^{\text{ч}}\ 2'\ 50'' \rightarrow$
   - хорде $0{,}5^\circ = 0^{\text{ч}}\ 31'\ 24''$
8. Наконец, Птолемей «переворачивает» свою первую теорему и получает формулу-аналог **косинуса суммы**:

   $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha* \cos\beta - \sin\alpha* \sin\beta$$

   и с помощью нее, шагая по $0{,}5^\circ$, получает **таблицу хорд**.

В частности, полученная таблица была нужна для решения задачи о приросте лунного диска от новолуния до полнолуния.

- Так же, Птолемей разработал сферическую тригонометрию

- Попытался доказать 5-й постулат Евклида (о трех пересекающихся прямых).

Герон

- Ему принадлежит результат по разложению корня из 63 в аликвотную дробь:

$$(63)^{1/2} = 7 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$$

Диофант

«Арифметика» была написана Диофантом около 250 г. н.э. Известно, что эта книга была утеряна во время великого александрийского пожара и найдена, спустя более чем 1000 лет великим математиком **Региомонтаном** (6 из 13 томов). Эти тома были переведены и долго служили настольными книгами для математиков.

В конце XX века, в Персии были найдены еще 4 тома, но факт их принадлежности к «Арифметике» Диофанта не был доказан.

Книги (сохранившиеся) «Арифметики» содержали 189 задач с решениями, не отличающихся систематикой. Это фактически начала алгебры, в которой впервые вводится **символ** для обозначения арифметических выражений и операций (т.е. т.н. *синкопированная алгебра* придумана именно Диофантом).

- *Переменная* обозначается ζ ; ее *степени* (рассматривались уравнения до 6-й степени):
  - ζ^2 - Δ^γ (квадрат);
  - ζ^3 - K^γ (куб);
  - ζ^4 - $\Delta^\gamma\Delta$ (квадратоквадрат);
  - ζ^5 - ΔK^γ (квадратокуб);
  - ζ^6 - $K^\gamma K$ (кубокуб);
- Вводятся символы для сложения, вычитания;
- *Свободный член* обозначается $\overset{o}{M}$;
- *Коэффициенты при степенях* – всегда числа (в уравнениях нет параметров);
- Под *решением уравнения* подразумевается рациональное положительное число;
- $K^\gamma\, \bar\beta\, \Delta^\gamma\, \bar\gamma\, \zeta\, \bar\alpha$ ενμοριω (часть от) $\Delta^\gamma\, \bar\alpha\, \zeta\, \bar\beta\, \overset{o}{M}\, \bar\alpha = (2\zeta^3 + 3\zeta^2 + \zeta)/(\zeta^2 + 2\zeta + 1)$;
- *Задачи* (целая группа задач, связанных с решением систем уравнений):
  - Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение равно 96.

    $$\begin{cases} a + b = 20, \\ a*b = 96; \end{cases}$$

    Решение: пусть разность двух этих чисел равна двум *аритмам* (переменным), т.е. $b – a = 2\zeta$, при учете того, что b<a (но это не важно, с точностью до переименования чисел a и b). Тогда:

    $$(10 – \zeta)*(10 + \zeta) = 96 \rightarrow 100 – \zeta^2 = 96 \rightarrow \zeta^2 = 4 \rightarrow \zeta = 2$$

    Ответ: a = 8, b = 12 (или наоборот).
  - Найти три таких числа, что квадрат суммы всех трех, вычтенный из каждого давал квадрат (какого-либо рационального числа).

    $$\begin{cases} x – (x + y + z)^2 = \alpha^2 \\ y – (x + y + z)^2 = \beta^2 \\ z – (x + y + z)^2 = \gamma^2 \end{cases}$$

    Решение: положим сумму трех чисел одному аритму, т.е.

    $$(x + y + z)^2 = \zeta \rightarrow x + y + z = \zeta^2 \quad (1)$$

    Пусть $x = 2\zeta^2$, $y = 5\zeta^2$, $z = 10\zeta^2$, тогда $\alpha^2 = \zeta^2$, $\beta^2 = 4\zeta^2$, $\gamma^2 = 9\zeta^2$. Подставляя в (1), получим: $2\zeta^2 + 5\zeta^2 + 10\zeta^2 = \zeta$, откуда $\zeta = 1/17$.

    Ответ: x = 1/289, y = 5/289, z = 10/289.

- **Эпитафия Диофанта**: «Здесь погребен Диофант, и камень могильный при счете искусном расскажет о том, сколь долго был его век. Велением бога он мальчиком был шестую часть жизни своей. В двенадцатой части, затем, прошла его юность. Седьмую часть прибавил пред нами очаг Гименея. Пять лет протекло и прислал Гименей ему сына. Но горе ребенку – едва половину он прожил тех лет, что отец, как скончался, несчастный. Четыре года страдал Диофант от потери тяжелой и умер, прожив для науки. Скажи мне, скольк*и* лет достигнув, смерть воспринял Диофант?»
  Решение: пусть продолжительность жизни Диофанта равна ζ. Тогда:
  $$1/6\,\zeta + 1/12\,\zeta + 1/7\,\zeta + 5 + 1/2\,\zeta + 4 = \zeta$$
  Ответ: $\zeta = 84$.

Решение задач дает основания полагать, что Диофант хорошо разбирался в теории чисел. Но в решениях задач нет общности – каждая задача решается по-своему, нет *метода* решения. Но, все же, огромным вкладом этого ученого в развитие математики явилось введение неизвестного и упрощение формы записи задач (символы).

Около 630 г н.э. Александрию завоевывают арабы. С этого момента начинают происходить необратимые изменения: вытесняются греческий и латинский языки, центр математики и науки в целом переносится в Индию и Китай.

25.11.05 [Лекция 9]

ИНДИЙСКАЯ МАТЕМАТИКА

Первые дошедшие до нас письменные источники по индийской математике – книги, написанные на санскрите, датируются 5-7 веками до н.э. Самая известная из них - **«Сульва Сутра» (Правило веревки)** в трех редакциях. Остальные источники написаны в 4-5 в. до н.э. – 16 в.н.э. Эти книги заметно повлияли на развитие математики в мире, хотя, вообще говоря, это книги по астрономии, но в них есть и задачи чисто по математике.

«Сурья Сидханта» (Наука Солнца) – 4-5 в. до н.э. До нас дошли 4 из 5 этих книг. Потом вышла одна книга, где рассказывается обо всех пяти. В них изложены в значительной мере достижения греческой и вавилонской математики. Это говорит о том, что индийские математики знали, что происходит в мире.

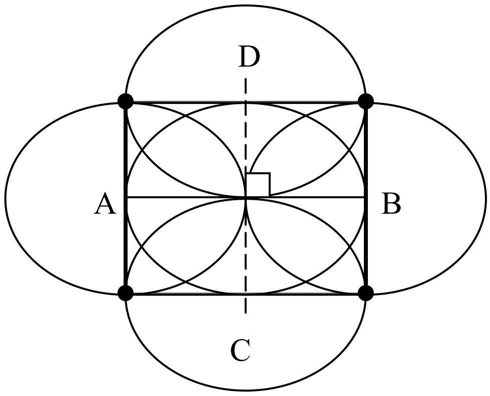
«Ариабхатиад» (автор – Ариабхат) – 499 г. Трактат в стихах по математике и астрономии, включающий решение геометрических задач, неопределенных уравнений. Книга приобрела большую известность и вплоть до 16 века переиздавалась и комментировалась.

«Брахма-спхута-сидханта» (Усовершенствованная наука Брахмы) – 628 г. Труд знаменитого индийского математика Брахмагупты, состоящий из 20 книг, только 2 из которых посвящены математике: №12 – арифметика, №15 – алгебра.

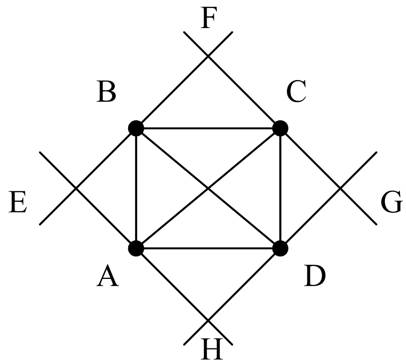
«Сидханта Сиромани» (Венец науки) – 1150 г. Автор – Бхаскара II. Труд состоит из 4 частей: 2 по математике и 2 по астрономии. Наиболее знаменитая математическая часть – «Лилавати» (Красавица) – посвящена арифметике. В 1587 г. император Акбар переводит книгу на персидский язык.

Книга «Правило веревки»

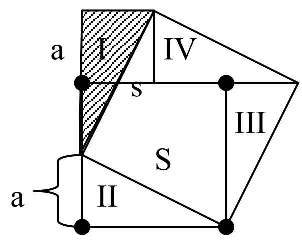
1. *Задача* о построении квадрата со стороной 2а по заданному 2а.
   Решение: есть отрезок длиной 2а. Проводим серединный перпендикуляр, потом окружности с центрами в концах отрезка и радиусом а и окружность с центром в середине. На пересечении серединного перпендикуляра и центральной окружности отмечаем точки C и D и строим окружности с центрами в этих точках и радиусом а. Получаем 4 точки пересечения этих окружностей с окружностями с центрами в концах отрезка. Это и есть вершины квадрата.



2. *Задача* об удвоении квадрата.
   Решение: проводим диагонали квадрата, строим в углах квадрата перпендикуляры к ним. На пересечениях перпендикуляров к диагоналям получаем вершины искомого квадрата (вдвое большего исходному).



3. *Задача* о построении квадрата с площадью, равной сумме площадей двух заданных квадратов (Теорема Пифагора).
   Решение: пусть меньший из заданных квадратов имеет сторону a, а больший – b. Отложим a на стороне квадрата b и проведем диагональ (гипотенузу треугольника со сторонами a и b). «Соединение квадратов двух мер отсекает меньшую на большую. Косопроложенная веревка содержит два квадрата»
   Доказательство: Площадь квадрата со стороной в гипотенузу состоит из S, s, III и IV. Сумма квадратов катетов состоит из S, s, I и II. В силу равенства треугольников: I = II = III = IV ➔ Теорема Пифагора.



4. *Задача* о приближении корня из двух. Решена с точностью до 5 десятичных знаков.
   $$\sqrt{2} = 1 + 1/3 + 1/3*4 + 1/3*4*34$$
5. *Задача* о нахождении числа π. Найдено $\pi = 3{,}088$

Индийская нумерация

- Индусы вводят позиционную систему – **десятичную**. Использовались несколько видов цифр. Один из наиболее популярных – **Брахми** (числа читаются справа налево):

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Каждая цифра увязывалась с некоторым словом («867–» : – - знак разряда, 7 – горы, 6 – запахи, 8 – боги). Изначально это делалось для запоминания, потом люди стали этим пользоваться и знак разряда стал не нужен.

Первые десятичные системы, дошедшие до нас, появились уже в 4 в. до н.э., но они были без нуля. Считается, что использовать реально знак 0 (**ноль**) стали именно индийские математики.

0 – «кха» (дыра, пробел)

- Первая запись, содержащая ноль найдена на каменной стене в г. Гвалиоре в 876 году. (При написании числа 270 возникает 0.) В обиход вошел термин из санскрита: обозначение нуля 0 – сурья (пустое). Арабы перевели «сурья» на «сыфр» (отсюда слово «цифра»).

  Впервые правила работы с нулем формулирует **Бхаскара II**.
- Слово «**корень**» тоже пришло из индийского: корень индусы называли «мула» (корень дерева).

  Правило извлечения корня: «вычти квадрат из нечетного места. Раздели ближайшее место на удвоенный корень, помещенный отдельно, и вычти квадрат частного. Запиши его внизу в строку. Удвой полученное выше и помести это внизу. Раздели на него ближайшее четное место. Раздвой удвоенное количество» - «Сридхара» (Курс арифметики), 11 век.

<u>*Пример1:*</u> 54756 (- – четные места,	– нечетные)

  Наибольший квадрат – 4. Нужно вычесть из 5. Получим 14756. Ближайшее место – 14. Квадрат – 4. Отсюда корень = 2 и 2*2=4 (удвоенный корень). ➔ 4

  Делим 14:4=3 и остаток 2. Вместо 14 пишем *2* (*2*756). Из 27 нужно вычесть квадрат частного: 3^2=9, 9*2=18. Вместо 27 пишем 18 (1856). Удвоенное частное – 6 (помещаем отдельно). ➔ 4 6

  Ближайшее место 185 делим на 46 (185:46=4 и остаток 1). Заменяем 185 на 16. 16 – полный квадрат. ➔ 4 6 8

  Раздвой полученное ➔ 2 3 4 (верный ответ).

  <u>*Пример2:*</u> Возьмем два 4-значных числа и умножим: 2317*1375=3185875. Изменим несколько цифр в полученном числе: 318**4**875. Как проверить правильно это произведение или нет? Индусы придумали правило такой проверки (работает в 9 случаях из 10): **«правило девятки»** - у числа и у суммы его цифр остаток от деления на 9 одинаков.

  (2+3+1+7):9=ост.4
  (1+3+7+5):9=ост.7
  (3+1+8+**4**+8+7+5):9=ост.0 – неверно.
- **«Правило ложного положения»**

  $$m_1/n_1 * x + m_2/n_2 * x + \ldots + m_r/n_r * x = C$$

  Возьмем число, кратное всем знаменателям и обозначим x_1. Будем считать, на время, что x_1 – решение задачи (заменим x на x_1). Получится число C_1. Получаем способ решения уравнения: $x = x_1 * C/ C_1$.
- **«Тройное правило»** - правило работы с пропорциями.
- **Степени и уравнения**

  У индусов была хорошая арифметическая символика. Они использовали символы для обозначения переменных и степеней:

  «йа» - первая неизвестная;
  «ва» - квадрат (степень 2);
  «гхана» - степень 3;

«варха-мула» - квадратный корень;
«гхана-мула» - кубический корень;
«ру» - свободный член.

Пример:

йа ва 0 йа 10 ру 8^0
йа ва 1 йа 0 ру 1
(^{0} – кружочек сверху над числом, означающий отрицательность числа)
Это значит: $10x – 8 = x^2 + 1$

* **Отрицательные числа** трактовали как имущественный долг, и правила работы с ними сформулировали.

Квадратное уравнение решается путем дополнения до полного квадрата:

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{ac + (b/2)^2} - b/2}{a}$$

Индусы понимали, что корень квадратного уравнения может иметь два значения, но отрицательное значение, как правило, игнорировалось. Так же корень из отрицательного числа не извлекался, т.к. отрицательное число не считалось квадратом.

Задача: определить число обезьян в стае, квадрат пятой части без трех которой прячется в пещере, а видно одну, забравшуюся на дерево.

Решение: x – число обезьян в стае. $(x/5 – 3)^2 + 1 = x$ или $x^2 – 55x = -250$. Отсюда $x_1=50$, $x_2 = 5$ (индусы рассматривали оба корня). 5 – не может быть корнем, т.к. в пещере не может находиться $5*1/5 – 3 = -2$ обезьяны. $\Rightarrow x = 50$.

- **Неопределенные уравнения** индусы тоже решали (задачи об одинаковом положении светил). В частности, Бхаскара II предложил полное решение неопределенного уравнения первой степени: $ax + b = cy$, где a, b, c – заданы, причем $(a,c)=1$ – взаимнопростые и $a>c$.

  Решение: рассмотрим дробь a/c как непрерывную (цепную) дробь, т.е.

$$\frac{a}{c} = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \dots + \cfrac{1}{q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}}}} \underset{\text{обозн}}{=} \frac{P_n}{Q_n}$$

  Пусть $a/c = [q_0 \dots q_n]$, тогда
  $a = cq_0 + c_1$
  $c_1 = cq_1 + c_2$
  …
  $c_{n-1} = c_nq_n$
  Получаем решение вида:

$$\begin{cases} x = (-1)^n b\, Q_{n-1} + Q_n t, \\ y = (-1)^n b\, P_{n-1} + P_n t. \end{cases}$$

  Так же, индусы умели решать **неопределенные уравнения II степени** (уравнение Пелля) $y^2 = ax^2 + b$.
- Было известно о треугольнике Паскаля и числосочетаниях.
- Введение синуса (термин «джива» для обозначения его – 1/2 тетивы лука (хорды)).
- 1501 г. появляется научный сборник, содержащий разложение арктангенса и подсчет числа π с 10 верными знаками:

$$\varphi = \mathrm{tg}\,\varphi – 1/3\,\mathrm{tg}^3\varphi + 1/5\,\mathrm{tg}^5\varphi – \dots \Rightarrow \pi/4 = 1 – 1/3 + 1/5 – \dots$$

02.12.05 [Лекция 10]

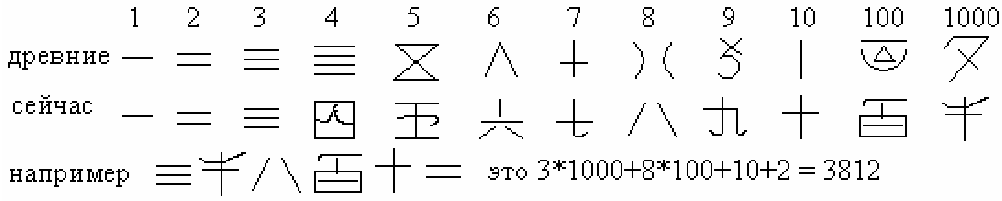
МАТЕМАТИКА КИТАЯ

Математика Китая относительно замкнутая и потому особо структурированная.

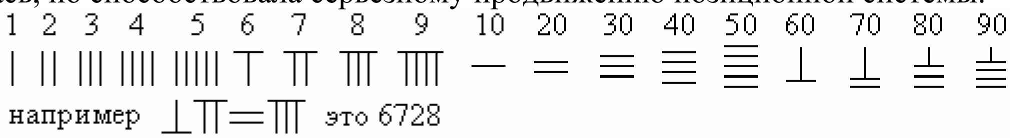
- Первые упоминания о математике Китая датируются вторым тысячелетием до н.э. и связаны с **календарем**: 354 дня (12 месяцев), каждые 19 лет вставляются новые 7 месяцев.
- Первый дошедший до нас источник – «Математика в девяти книгах» - комплекс знаний о китайской математике первого тысячелетия до н.э.
- Большое значение математике в Китае предавали уже в 3-7 веках до н.э. (правление династии Чжоу). Тогда была разработана система обучения математике детей 6-8 лет.
- 618 – 907 г. н.э. (династия Тан) – математику изучают в академии в течение 7 лет.
- 627 г. н.э. в Китае насчитывается около 3260 дипломированных математиков.
- XIII век – расцвет математики Китая, после чего спад и застой.

Китайская нумерация

До нас дошли древнекитайские игральные кости (11-14 век до н.э.) с цифрами. Нумерация в Китае основана на *мультипликативном* принципе:



Пользование налогами привело к очень красивой нумерации. Она, к сожалению, не прижилась, но способствовала серьезному продвижению позиционной системы.

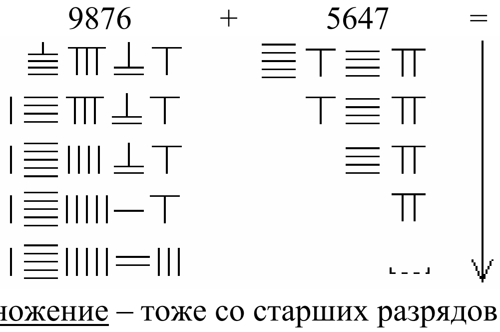


Сунь Цзы (3 век до н.э.) «единицы вертикальны, десятки горизонтальны, сотни стоят, меж тем как тысячи лежат. Таким образом тысячи и десятки имеют одинаковый вид как десятки тысяч и сотни».

Единственное, что мешало признать позиционную систему – отсутствие нуля (палочки).

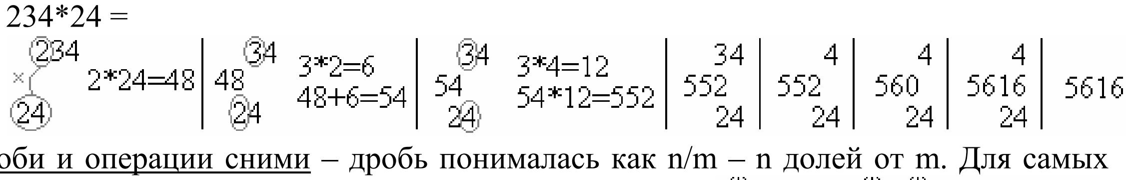
Арифметические действия

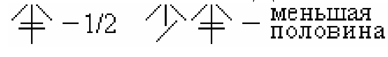
- Сложение – поразрядное, но начиная со старших разрядов:



- Умножение – тоже со старших разрядов:

234*24 =



- Дроби и операции сними – дробь понималась как n/m – n долей от m. Для самых известных дробей вводились специальные иероглифы: 

Правило сокращения дробей: «то, что можно – пополам раздели. Если нельзя, то установи количество числителя и знаменателя и вычти из большего меньшее. Продолжай взаимно уменьшать, пока не получишь равные числа. На это число и сократи». – аналог правила Евклида нахождения **НОД**.

Сложение дробей – НОК не искали, а перемножали знаменатели: $a/b + c/d = (ad + cb)/bd$.

Деление числа на дробь – умножали на знаменатель, потом делили на числитель.

Десятичные дроби активно использовались, в качестве десятичных применялись меры длины (2 век до н.э.):

1 чи = 10 цунь
1 цунь = 10 фэнь
1фэнь = 10 ли
1 ли = 10 фа
1 фа = 10 хао

Цзу Чунь Жи (5 век до н.э.) – посчитал число π с точностью до 7 знаков:

π = 3 чжан, 1 чи 4 цунь 1 фэнь 5 ли 9 хао 2 мяо 7 ху

Позже, от иероглифов, означающих меры длины, отказались и ввели *точку (дянь)*, отделяющую целую часть от дробной.

Сяо Янь говорил о главном удобстве десятичных дробей: не надо делить и умножать на степень десятки, можно сдвинуть дянь в нужную сторону.

- Корни 2 и 3 степени извлекать умели;

«Математика в девяти книгах»

Точное время написания этого труда неизвестно. Но известный математик **Лю Хуэй** говорил, что эти книги были составлены по более ранним источникам главным министром государства **Чжан Цанем**, который умер в 15 г. до н.э. Книга представляет собой практическое руководство для финансистов, землемеров и т.д.

1 книга: Измерение полей – площади прямоугольных фигур и круга.

2 книга: Соотношения между различными видами зерновых культур – обмен, стоимость, пропорции.

3 книга: Деление по ступеням – задачи типа: «Разделить пять оленьих шкур между пятью чиновниками в отношении 5:4:3:2:1».

4 книга: Шао Гуан – отыскание стороны прямоугольника по его площади и другой стороне; стороны квадрата по диагонали, ребра куба по объему, диагонали круга или шара и т.д.

5 книга: Оценка числа рабочих, необходимого для выполнения работ.

6 книга: Пропорциональное распределение – бассейн, встречи, зерновые поставки, дальность перевозки и т.д.

7 книга: Об избытке и недостатке – правила решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассматривались три случая, т.к. все коэффициенты положительны. Один из них:

$$\begin{cases} a_1x = y + d_1, \\ a_2x = y - d_2; \end{cases}$$

d_1 – избыток, d_2 – недостаток; a_1, a_2 ($a_1>a_2$) – нормы.

Правило решения: отложить на доске вносимые нормы, под ними избыток и недостаток. Перемножить те и другие крест накрест и составить *ши* (сумма произведений), *фа* (сумма избытка и недостатка):

$$\begin{array}{llll} a_1 & a_2 & & \text{ши} = a_1d_2 + a_2d_1 \\ d_1 & d_2 & & \text{фа} = d_1 + d_2 \end{array}$$

Затем составить разность большей и меньшей норм $a_1 - a_2$. Частное от деления ши и фа на разности норм дают стоимость вещи (x) и число покупателей (y):

$$x = (d_1 + d_2)/ (a_1 - a_2) ; \;\; y = (a_1d_2 + a_2d_1)/(a_1 - a_2)$$

Это аналог **правила Крамера**.

8 книга: Фан Чен – алгоритм решения системы n уравнений с n неизвестными (аналог **метода Гаусса**).

Задача: 3 снопа хорошего, 2 среднего и 1 плохого урожая дают вместе 39 доу зерна. 2 снопа хорошего, 3 среднего и 1 плохого – 34 доу зерна. 1 сноп хорошего, 2 среднего и 3 плохого – 26 доу зерна. Сколько зерна дает сноп каждого из урожаев?

Решение: x – хороший, y – средний, z – плохой.

```
 1 2 3       1   3          3          3
 2 3 2  →  2 5 2  →  4 5 2  →    5 2
 3 1 1      3 1 1      3 1 1     36 1 1   →  z = 99/36, y = 153/36, x = 333/36.
 --------   --------   --------   ---------
26 34 39   26 34 39   39 24 39   99 24 34
```

В ходе промежуточных вычислений по этому методу появились **отрицательные числа**. Для китайских математиков это был шок. Ведь ответ был верным и положительным. Они долго не знали как с ними поступать:

- Ставили перед каждым отрицательным числом иероглиф «не»;
- Зачеркивали последний знак;
- Писали другими чернилами и т.д.

Именно китайцам принадлежат разработанные правила обращения с отрицательными числами. Но, например, не было деления двух отрицательных чисел, т.к. это не требовалось в процессе работы метода Гаусса.

9 книга: Решение линейных уравнений из 8-й книги с использованием отрицательных чисел.

\+ Имелся аналог **схемы Горнера**;
\+ Решались квадратные и биквадратные уравнения;
\+ Китайская теорема об остатках;
\+ Многие результаты в теории чисел;
\+ Интерполяционная формула **многочлена Ньютона** (мат. справочник 15 века);
\+ Треугольник Паскаля (математический справочник 15 века);
\+ Работа с отрицательными числами как с равноправными.

Эти и многие другие результаты работы китайских математиков активно использовались потом в Европе.

09.12.05 [Лекция 11]

МАТЕМАТИКА В СТРАНАХ ИСЛАМА

В 7 веке начинается стремительное нашествие ислама:

622 г. – Мухаммед бежит из Мекки в Медину

630 г. – возвращается в Мекку

632 г. – умирает;

635 г. – потомки Мухаммеда (халифы) образуют исламский халифат со столицей в Дамаске;

762 г. – столица исламского халифата переносится в Багдад.

Вообще говоря, ислам встречает на пути своих завоеваний культуру более древнюю и высокую, развитую, чем своя. Но не уничтожает ее, а стремится укрепить и преумножить. В больших городах возникают библиотеки, на арабский язык переводят греческие, индийские книги.

- **Аль-Мамун** (годы правления 813 - 833) – создает академию под названием «Дом мудрости», привлекая в нее самых мудрых ученых, самое современное оборудование (обсерватории и т.д). Там проводились исследования, переводился Евклид, там же получали образование.

- **Акбар** – император. Перевел индийскую «Лилавати».
- **Аль-Хорезми** – математик высокого уровня, работавший при Аль-Мамуне. Сохранились 5 его сочинений по арифметике, алгебре, астрономии, географии и календарь.
    1. Арифметика – в этом труде излагается индийская *позиционная система счета*, даются руководства к верному и аккуратному пользованию ей. Действия рассматриваются как регулярный вычислительный процесс: необходимо выучить таблицу умножения, и от нее…

       «Алгоритми сказал…» - латинский перевод, вышедший во время противостояния абацистов (считали на счетах) и алгоритмистов (рассматривали действия как регулярный вычислительный процесс), т.е. слово «алгоритм» – от фамилии ученого.
    2. Краткая книга об исчислении алгебры и альму-кабалы – книга хранится в Оксфорде.
        - Альджабр – операция восполнения;
        - Альму-кабала – операция сокращения одинаковых слагаемых в разных частях уравнения.

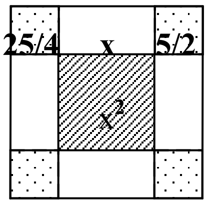
$$2x^2 + 100 – 20x = 58 \quad | \text{ Альджабр}$$
$$2x^2 + 100 = 58 + 20x \quad | \text{ Альму-кабала}$$
$$2x^2 + 42 = 20x$$

* Слово «алгебра» возникло отсюда, от операции восполнения.

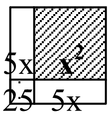
Центральное место в книге занимает решение *квадратных уравнений*. И «красной нитью» на 1000 лет идет уравнение:

$$x^2 + 10x = 39$$

Автор дает формулу его решения и доказательство (та самая формула, которой мы пользуемся сейчас) – алгоритм **добавления до полного квадрата**: $x^2 + 10x + (25/4)*4 = 39 + (25/4)*$



$$(x + 5)^2 = 64$$
$$x + 5 = (64)^{1/2}$$
$$x = 3 \ (<0 \text{ не рассматривается}).$$



$$x^2 + 21 = 10x$$

«Раздвой корни. Это будет 5. И умножь их на равные себе (25). Вычти из этого 21, которые прибавлены к квадрату…»

Автор говорит о двух уравнениях, т.е. корень может получиться как прибавлением, так и вычитанием.

Так же дается аккуратный разбор всех случаев. *Дирхемы* – аналог дискриминанта.

- **Аль-Кораджи** – продолжает работу Аль-Хорезми, добавляя аккуратную работу иррациональностями и рассматривая уравнения с иррациональными коэффициентами: $x/(10 – x) + (10 – x)/x = 5^{1/2}$

$$(2 + 5^{1/2})x^2 + 100 = (2 + 500^{1/2})x$$
$$\rightarrow x = 5 – (225 – (50000)^{1/2})^{1/2}$$

Возникают сложные иррациональности, являющиеся решением квадратного уравнения.

- **Абу-Камир** – решал биквадратные уравнения и уравнения так или иначе приводящиеся к квадратным, задачи на неопределенные уравнения и системы уравнений. *Задачи «О птицах»* - одна из них приводится к виду:

$$\begin{cases} x + y + z = 100, \end{cases}$$

$$3x + y/20 + z/3 = 100;$$

Решение: птицы – целые числа. Значит y делится на 20, z – на 3 и т.д.

- **Аль-Ходжани** – известно, что он в 8-9 веке (за 1000 лет до Эйлера) доказал невозможность решения в целых числах уравнения $x^3 + y^3 = z^3$. На что **Аль-Хусейн** позже сказал, что в этом доказательстве есть ошибка. Но это только факты, рукописи не сохранились.
- **Сабит ибн Кора** (830 – 901 г.) – сумел доказать, что если

$$p = 3*2^n – 1,\ q = 3*2^{n-1} – 1,\ r = 9*2^{2n-1} – 1;\ p, q, r – \text{простые, то}$$

$M = 2^n*p*q$ и $N = 2^n*r$ – *дружественные* (сумма делителей одного равна другому)

Например, для n=2: 220, 284.

* Для n=4 (17296 и 18416) доказал Ферма, для n=7 доказал Декарт, в 1749 году Эйлер указал таблицу с 61 парой дружественных чисел.

- **Аль-Каши** (16 век) – доказал формулу $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ (арабам были известны *биномиальные коэффициенты*, формула бинома Ньютона).
- **Омар Хайям** – один из самых знаменитых поэтов и математиков.
  - Составил календарь.
  - Теории Евдокса и Евклида построения действительного числа: научился раскладывать в непрерывные дроби, умножать отношения, сравнивать (<, >) их.
  - Одно из доказательств в теории параллельности (5 постулат Евклида), к сожалению, безуспешное.
  - Кубические уравнения (25 типов). Решал аккуратно, геометрически, надеясь, что потомки смогут это дорешать. Но он упустил случай с тремя корнями в кубическом уравнении.

\+ Потребности к тригонометрии привели к нахождению таблицы Птолемея и изобретению тангенса и котангенса (задача о гномонах – солнечных часах: тень – это ctg).

МАТЕМАТИКА В ЕВРОПЕ

Наиболее сильно развитая часть Римской империи – запад. Восток – отсталый, с минимальными потребностями. На протяжении сотни лет ничего не меняется.

- **Боэций** – непререкаемый авторитет. Его книги долго переписывались. Его «Основы арифметики» - на самом деле достаточно поверхностный перевод греческого Никомаха.

Но это не мешало данной книге входить в тогдашний т.н. *тривиум* – 3 дисциплины, которые должен был знать каждый человек, чтобы считаться образованным (начальное образование): арифметика, геометрия, астрономия. В *квадриум* – необходимый минимум для высшего образования – кроме этих дисциплин добавлялась еще музыка.

Возникает феодальный образ жизни, на востоке влияет ислам. Математика по-прежнему в загоне. Основная деятельность в этой области разворачивается в монастырях. Очень мало самостоятельных трудов.

- **Аккуин** (9 век) – монах при дворе Карла Великого. Автор «Задач для оттачивания ума юношей»: волк, коза и капуста; собака и кролик и др.

Начиная с 116 года, наука, в том числе и математика, начинает развиваться. Процветает феодальный строй, ремесла, торговля, коммерция. Налаживаются связи с востоком, и богатая восточная культура начинает проникать в Европу. В 1085 году у мавров отвоеван город Толедо. Туда, с целью изучения арабских исторических и культурных памятников и документов, устремляются студенты. Активные связи с востоком ведут итальянские купцы.

- **Леонардо (Фибоначчи) Пизанский** – в 1202 году, вернувшись с востока, пишет «Книгу абака», в 1220 – «Практика геометрии». В этих книгах он излагает свои знания, почерпнутые в восточной экспедиции, цитирует Хорезми. Но так же имеются и его собственные, не арабские задачи, не встречающиеся до него (числа Фибоначчи).

В своих трудах Фибоначчи первым использует индийско-арабскую нумерацию, что прямо противоречит церкви с ее греческой артиллерией. Но такой способ записи существенно упрощает написание торговых книг, потому начинает побеждать церковный (греческий).

- **Архиепископ Кентерберийский** - звездчатые многоугольники.

Многие греческие математики устремляются на запад. Переводятся Птолемей, Герон, Аполоний и др.

- **Иоганн Мюллер (Региомонтанус)** – знаменитые переводы + свои труды: «Коммерческая математика», «О различных треугольниках».

К этому моменту результаты арабской математики устанавливают мировой уровень развития этой науки, причем этот уровень не превзойден. Европейцы впервые вышли на передовые позиции в мире в области решения кубических уравнений.

- **Кука Пачолли** (1494 г.)- написал книгу «Сумма арифметики», которая явилась итогом осознания европейцами мирового наследия математики. Язык написания книги почти не отличается от современного. Книга заканчивается словами «решить уравнение $x^3 + mx = n$ (или $x^3 + n = mx$ или $x^3 = n + mx$) есть задача такая же невозможная, как квадратура круга».

Это был вызов всем математикам того времени. И он был принят. Впервые решить эти уравнения удалось в Болонском университете в начале 16 века.

- **Сципион Д'ель Ферро** – профессор Болонского университета. Он решил все три уравнения, но публиковать способ решения не стал. Он решал эти уравнения на специальных соревнованиях, не открывая метода.
- **Фиор** – ученик Сципиона. В 1500 году тоже решал уравнения, но метода не открывал.
- **Тарталья** – в 1535 году переоткрывает эти методы, что доказывает в публичном соревновании с Фиором.
- **Кардано** – друг Тартальи, которому в 1539 году тот рассказал метод решения кубических уравнений, взяв слово не публиковать его. В 1545 году Кардано издает книгу «Великое искусство», в которой излагает метод решения со ссылками на авторов и дает собственное геометрическое его доказательство.

  Так же в этой книге появляются *мнимые числа*, но без какого-либо применения. Автор обошел стороной вопрос тех уравнений, в которых при положительности коэффициентов и решения для получения этого решения по формулам Кардано приходится иметь дело с корнями из отрицательных чисел, которые, впрочем, уничтожаются в процессе решения.
- **Феррари** – ученик Кардано, автор формулы решения уравнения 4-й степени (с доказательствами), которую учитель приводит в своем «Великом искусстве».

В 1546 году выходит гневная книга бывшего друга – Тартальи «Вопросы». На что в 1547 году появляется книга Феррари «Вызовы» с защитой учителя и его книги.

- **Рафаэль Рамбелли** – автор книги «Алгебра» (1572), в которой он вводит *комплексные числа* с целью аккуратного завершения теории Кардано, учится оперировать с ними.

  Обозначения: $3i – R[0_m, 9]$; $(52 – (– 2209)^{1/2})^{1/3} = 4 + (– 1)^{1/2}$

С этого момента в Европе начинается математический бум, т.к. становится понятно, математику прошлого можно превзойти. Все устремляются изучать древние тексты на предмет приобретения новых знаний, нуждающихся в доработке и продолжении. Так возникает Новая Европейская Математика.